Heute:
- Wiederholung DGLs
- Systeme von DGLs
  → Lösungsverfahren

Wiederholung DGLs aus Ana A

siehe Übungsnotizen PDF für Ana A auf der Website.

→ lineare homogene DGL mit konst. Koeffizienten ⟹ Euler Ansatz

⇝ inhomogene Lösung durch geeigneten Ansatz (geht auch über eine Tabelle).

→ separierbare homogene DGL erster Ordnung ⟹ Separation der Variablen.

⇝ inhomogene Lösung über Variation der Konstanten. (Idee: Die Konstante als Funktion von x auffassen).

7.2.4 Variation of Constants

Variation of Constants is another method to find the particular solution for an inhomogeneous ODE with constant coefficients. The general idea is to find the homogeneous solution and then consider the constant coefficients due to integration as functions themselves. By plugging it into the ODE one finds an ODE in the parameter function and solving this results in the general solution of the inhomogeneous ODE.

Example 7.2.6
Consider the inhomogeneous first-order ODE

$$y'(t) - y(t) = e^{2t}.$$

First, we solve the homogeneous equation

$$y'(t) - y(t) = 0,$$

which has the general solution

$$y_h(t) = Ce^t,$$

which can both be found via Seperation of Variables as well as Euler's method. In the method of variation of constants, we replace the constant C by a function $C(t)$ and make the ansatz

$$y_p(t) = C(t)e^t.$$

Note now, that we replaces C with $C(t)$! Differentiating with respect to t yields

$$y_p'(t) = C'(t)e^t + C(t)e^t.$$

Substituting y_p and y_p' into the original equation gives

$$C'(t)e^t = e^{2t},$$

and hence

$$C'(t) = e^t.$$

This is our differential equation in C which we know have to solve. Integrating, we obtain $C(t) = e^t + D$. with a constant of integration D.
Therefore, a particular solution is

$$y_p(t) = (e^t + D) \cdot e^t = e^{2t} + De^t.$$

The general solution of the inhomogeneous equation is thus

$$y(t) = De^t + e^{2t}.$$

We can clearly see the general solution structure again, where De^t is the homogenous solution and e^{2t} is the particular solution.

Serie 8 Aufgabe 1a):

$$y''' - 3y'' + 2y' = x$$ Inhomogen

→ homogenes Problem: $y''' - 3y'' + 2y' = 0 \rightsquigarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0 \implies \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$ Nullstellen des char. Polynoms

Homogene Lösung: $y_{Hom}(x) = Ae^{0\cdot x} + Be^{1\cdot x} + Ce^{3\cdot x}$.

Inhomogene Lösung: Ansatz ist ein Polynom derselben Ordnung $\alpha x + \beta$. Achtung! Weil $e^{0\cdot x} = 1$ ist die Konstante Teil der homogenen Lösung! Wir multiplizieren alles mit x, analog wie bei doppelten Nullstellen.

Korrekter Ansatz: $\alpha x^2 + \beta x$.

Einsetzen + Koeffizientenvergleich liefert $\alpha = \frac{1}{4}$ und $\beta = \frac{3}{4}$.

Aus Zeit und Relevanzgründen überspringen wir Richtungsfelder. Auf meiner Website sind Notizen dazu.

Was ist ein (2D)-System von DGLs (erster Ordnung)?

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + b(t),$$

wobei wir ausgeschrieben das folgende System meinen:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{bmatrix}.$$

Diese Matrix-Vektor-Gleichung schreibt das folgende System kompakter:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2(t). \end{cases}$$

Der Term $b(t)$ heisst *inhomogener Teil* oder auch *Störterm* des Systems. Er beschreibt äussere Einflüsse oder Anregungen, die nicht aus dem Zustand $x(t)$ selbst resultieren. Wichtig ist dabei, dass $b(t)$ im Allgemeinen zeitabhängig sein kann.

Danach wollen wir „lösen".

Ableitungen, die wir kennen.

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}$$

Störterm / Inhomogener Teil.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}.$$

Sagt uns, wie x_1 und x_2 zusammenhängen.

Wie lösen wir so ein System? ⟹ Idee: mit LinAlg...

Homogenes System: $b = 0 \implies \dot{x} = Ax$.

Sei v ein Eigenvektor von A mit EW λ. → $Av = \lambda v$.

Dann gilt für die Funktionen: $e^{\lambda t}v$ die Beziehung:

$$A(e^{\lambda t}v) = e^{\lambda t}Av = e^{\lambda t}\lambda v = \lambda(e^{\lambda t}v).$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}v) = \lambda e^{\lambda t}v. \implies \frac{d}{dt}(e^{\lambda t}v) = A\cdot(e^{\lambda t}v).$$

⟹ ist eine Lösung der DGL!

Die Allgemeine Lösung ist dann:

$$C_1 e^{\lambda_1 t}v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}v_2$$, weil A nur (maximal) 2 EV und EW hat.

Die inhomogene Lösung raten wir wie im 1D Fall.

Beispiele

Beispiel 1

Betrachte das gekoppelte lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= 2x_1(t) + x_2(t),\\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + 2x_2(t).\end{aligned}$$

In Matrixschreibweise lautet das System

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Die Eigenwerte der Matrix A sind

$$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = 1,$$

mit zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung als

$$x(t) = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstanten sind.

$\rightsquigarrow$ $x_1(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{t}$ (Komponentenweise abgelesen)
$x_2(t) = c_1 e^{3t} - c_2 e^{t}$

Beispiel 2: Inhomogenes lineares System

Betrachte das gekoppelte lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= 2x_1(t) + x_2(t),\\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t) + e^{-t}.\end{aligned}$$

In Matrixschreibweise lautet das System

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t), \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{t} \end{bmatrix}.$$

Die Eigenwerte der Matrix A sind

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 1,$$

mit zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Systems ist

$$x_h(t) = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems erhält man durch den Ansatz

$$x_p(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

woraus durch Einsetzen das System

$$\begin{aligned}-a &= 2a + b\\ -b &= b + 1\end{aligned}$$

folgt. Die Lösung davon ist $a = 1/6$ und $b = -1/2$. Damit ist

$$x_p(t) = \bar{e}^{t} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung lautet somit

$$x(t) = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \bar{e}^{t} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

$\longrightarrow$ $x_1(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{t} + \frac{1}{6} e^{-t}$
$x_2(t) = -c_2 e^{t} - \frac{1}{2} e^{-t}$

Obwohl die Inhomogenität nur in x_2 steht kriegt durch die Koppelung der DGLs auch x_1 eine Störung

Alternative Lösung des homogenen Systems durch Umwandlung in eine DGL 2. Ordnung

Betrachte das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= 2x_1(t) + x_2(t),\\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + 2x_2(t).\end{aligned}$$

Das Ziel ist es nur eine DGL in x_1 zu erhalten und alle x_2 zu eliminieren. Wir leiten die erste Gleichung noch einmal ab, um eine DGL zweiter Ordnung zu erhalten

$$\ddot{x}_1(t) = 2\dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t).$$

Hier können wir die zweite DGL einsetzen für $\dot{x}_2(t)$. Wir erhalten nach einsetzen:

$$\ddot{x}_1(t) = 2\dot{x}_1(t) + x_1(t) + 2x_2(t).$$

Jetzt können wir mithilfe der ersten Gleichung $x_2(t) = \dot{x}_1(t) - 2x_1(t)$ schreiben und erhalten die DGL zweiter Ordnung nur in x_1:

$$\ddot{x}_1(t) - 4\dot{x}_1(t) + 3x_1(t) = 0.$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1.$$

Die Lösung für $x_1(t)$ ist

$$x_1(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{t}.$$

Aus $x_2(t) = \dot{x}_1(t) - 2x_1(t)$ folgt

$$x_2(t) = (3c_1 e^{3t} + c_2 e^{t}) - 2(c_1 e^{3t} + c_2 e^{t}) = c_1 e^{3t} - c_2 e^{t}.$$

Die allgemeine Lösung des Systems lautet somit

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Dies ist dieselbe Lösung, die wir auch durch die Eigenwert-Methode erhalten haben!

Die inhomogene Lösung würde man jetzt genau wie oben finden.